Εξέταση Σεπτεμβρίου 2021 - Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μία είναι η σωστή απάντηση και αυτή πρέπει να επιλέξετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Ο χρόνος που τέθηκε στην κάθε ερώτηση για τις δύο ομάδες θεμάτων (Α) και (Β) που δημιουργήθηκαν είναι 9 λεπτά με 1 λεπτό διάλειμμα μεταξύ δυό διαδοχικών ερωτήσεων. Η επιλογή **δεν απαντώ** υπάρχει για να μην επιβαρυνθείτε με αρνητική βαθμολόγηση.

Ερώτηση 1.

(Α) Ο μιγαδικός αριθμός

$$\left(i^{e/2}\right)^{i^{e/2}}$$

έχει απόλυτη τιμή (ή μέτρο) ίση με

(i) $e^{(e\pi/4)\sin(e\pi/4)}$

(ii) $e^{-(e\pi/4)\sin(e\pi/4)}$

(iii) e

(iv) e^{-1}

(v) κανένα από τα παραπάνω

(vi) δεν απαντώ

(Β) Ο μιγαδικός αριθμός

$$\left(e^{i}\right)^{e^{i}}$$

έχει απόλυτη τιμή (ή μέτρο) ίση με

(i) $e^{\sin 1}$

(ii) $e^{-\sin 1}$

(iii) e

(iv) 1

(v) κανένα από τα παραπάνω

(vi) δεν απαντώ

Ερώτηση 2.

(Α) Λαμβάνοντας υπόψη την αντιστοίχιση των σημείων του $\mathbb{C}$ με τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ η μιγαδική συνάρτηση log απεικονίζει το υποσύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^2$ που βρίσκονται στο άνω κλειστό ημιεπίπεδό του και έχουν απόσταση από την αρχή των αξόνων γνήσια μεγαλύτερη από τη μονάδα και γνήσια μικρότερη από τον αριθμό (του Euler) e στο εξής υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$:

(i) $(0,1)\times[0,\pi]$

(ii) τα σημεία του επιπέδου με $y\geq 0$

(iii) $(0,\pi)\times[0,1]$

(iv) στα σημεία του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου

(v) κανένα από τα παραπάνω

(vi) δεν απαντώ

(B) Λαμβάνοντας υπόψη την αντιστοίχιση των σημείων του $\mathbb{C}$ με τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ η μιγαδική συνάρτηση log απεικονίζει τον άνω ανοικτό ημιδίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα από τον αριθμό (του Euler) e στο εξής υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$:

(i) $(0, +\infty) \times (0, \pi)$

(ii) $(-\infty, 0) \times (0, \pi)$

(iii) $(0, \pi) \times (-\infty, 0)$

(iv) $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$

(v) κανένα από τα παραπάνω

(vi) δεν απαντώ

Ερώτηση 3.

(A) Δίνονται τα δύο όρια

$$I = \lim_{n\to\infty} Arg\left((1+i)^{1/n}\right)$$

και

$$J = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Τότε,

(i) $I = J = 0$

(ii) $I = 1$, και J δεν υπάρχει

(iii) $I = J = 1$

(iv) I δεν υπάρχει, $J = 0$

(v) $I = 0$, και J δεν υπάρχει

(vi) κανένα από τα παραπάνω

(vii) δεν απαντώ

(B) Δίνονται τα δύο όρια

$$I = \lim_{n\to\infty} Arg\left((1+i)^n\right)$$

και

$$J = \lim_{n\to\infty} (1+i)^{1/n}.$$

Τότε,

(i) $I = J = 0$

(ii) $I = 1$, και J δεν υπάρχει

(iii) $I = J = 1$

(iv) I δεν υπάρχει, $J = 0$

(v) I δεν υπάρχει, $J = 1$

(vi) $I = 0$, και J δεν υπάρχει

Only Maths Official-

(vii) κανένα από τα I και J δεν υπάρχει.

(viii) κανένα από τα παραπάνω

(ix) δεν απαντώ

Ερώτηση 4.

(A) Δίνονται τα δύο όρια

$$I = \lim_{z\to\infty} \log(z - \log(-i))$$

και

$$J = \lim_{z\to i} \sin\left(\frac{1}{z-i}\right).$$

Τότε,

(i) $I = J = \infty$

(ii) $I = \infty$ και J δεν υπάρχει

(iii) $I = \infty$ και $J = 0$

(iv) I δεν υπάρχει, $J = \infty$

(v) I δεν υπάρχει, $J = 1$

(vi) $I = 0$, και $J = \infty$

(vii) $I = 0$, και J δεν υπάρχει

(viii) κανένα από τα I και J δεν υπάρχει

(ix) I δεν υπάρχει και $J = 0$

(x) κανένα από τα παραπάνω

(xi) δεν απαντώ

(B) Δίνονται τα δύο όρια

$$I = \lim_{z\to 2i} e^{(z+2i)/(z^2+4)}$$

και

$$J = \lim_{z\to\infty} \cos\left(iRe(1/z)\right).$$

Τότε,

(i) $I = J = 1$

(ii) $I = \infty$ και J δεν υπάρχει

(iii) $I = \infty$ και $J = 1$

(iv) I δεν υπάρχει, $J = \infty$

(v) I δεν υπάρχει, $J = 1$

(vi) $I = J = \infty$

(vii) $I = 1$, και J δεν υπάρχει

(viii) κανένα από τα I και J δεν υπάρχει

(ix) $I = 1$ και $J = \infty$

(x) κανένα από τα παραπάνω

Only Maths
-Official-

(xi) δεν απαντώ

Ερώτηση 5.

(A) Η συνάρτηση $f(x+iy) = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι:

(i) ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$ και $\partial f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$

(ii) $\mathbb{R}-$διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{C}$ και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$ και $\partial f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$

(iii) $\mathbb{C}-$διαφορίσιμη μόνο στο 0 και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$ και $\partial f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$

(iv) Ακέραια και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = x^2-y^2-2ixy$ και $\partial f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$

(v) $\mathbb{C}-$διαφορίσιμη μόνο στο 0 και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$ και $\partial f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$

(vi) $\mathbb{R}-$διαφορίσιμη μόνο στο 0 και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$ και $\partial f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$

(vii) Κανένα από τα παραπάνω

(viii) Δεν απαντώ

(B) Η συνάρτηση $f(x+iy) = x^3 + xy^2 - i(x^2y + y^3)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι:

(i) ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$ και $\partial f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$

(ii) $\mathbb{R}-$διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{C}$ και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$ και $\partial f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$

(iii) $\mathbb{C}-$διαφορίσιμη μόνο στο 0 και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$ και $\partial f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$

(iv) Ακέραια και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$ και $\partial f(x+iy) = x^2-y^2-2ixy$

(v) $\mathbb{C}-$διαφορίσιμη μόνο στο 0 και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$ και $\partial f(x+iy) = x^2-y^2+2ixy$

(vi) $\mathbb{R}-$διαφορίσιμη μόνο στο 0 και ισχύει $\bar{\partial} f(x+iy) = 2(x^2+y^2)$ και $\partial f(x+iy) = x^2-y^2-2ixy$

(vii) Κανένα από τα παραπάνω

(viii) Δεν απαντώ

Ερώτηση 6. (Σωστό ή Λάθος;)

(A) Η συνάρτηση $\cosh(iz),\ z \in \mathbb{C}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$\cosh(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

και ισχύει:

$$\cosh^2(iz) + \sinh^2(iz) = 1.$$

(i) Σωστό

(ii) Λάθος

Only Maths -Official-

(iii) Δεν απαντώ

(B) Η συνάρτηση $\sinh(iz),\ z \in \mathbb{C}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$\sinh(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

και ισχύει:

$$\cosh^2(iz) - \sinh^2(iz) = 1.$$

(i) Σωστό

(ii) Λάθος

(iii) Δεν απαντώ

Ερώτηση 7.

(A) Το ολοκλήρωμα

$$\int_{[1-i,-1-i]} \frac{1}{i-z}$$

έχει την τιμή

(i) $-2i\dfrac{\pi}{3}$

(ii) $-2i\dfrac{\pi}{6}$

(iii) $2i\dfrac{\pi}{3}$

(iv) $2i\dfrac{\pi}{6}$

(v) $2i\arctan(1/2)$

(vi) $-2i\arctan(1/2)$

(vii) Κανένα από τα παραπάνω

(viii) Δεν απαντώ

(B) Το ολοκλήρωμα

$$\int_{[-1+i,1+i]} \frac{1}{i+z}$$

έχει την τιμή

(i) $-2i\dfrac{\pi}{3}$

(ii) $-2i\dfrac{\pi}{6}$

(iii) $2i\dfrac{\pi}{3}$

(iv) $2i\dfrac{\pi}{6}$

(v) $2i\arctan(1/2)$

(vi) $-2i\arctan(1/2)$

(vii) Κανένα από τα παραπάνω

(viii) Δεν απαντώ

Ερώτηση 8.

(A) Η τιμή του ολοκληρώματος της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - (2 + \frac{i}{2})z + i}$$

πάνω από την απλή καμπύλη με αρχή και τέλος το σημείο $1 + i$, η οποία διέρχεται διαδοχικά από τα σημεία $-1 + i, -1 - i, 1 - i$ (με αυτή τη σειρά), είναι

(i) $4\pi \dfrac{4i - 1}{17}$

(ii) $-4\pi \dfrac{4i - 1}{17}$

(iii) $4\pi \dfrac{4i + 1}{17}$

(iv) $-4\pi \dfrac{4i + 1}{17}$

(v) Κανένα από τα παραπάνω.

(vi) Δεν απαντώ

(B) Η τιμή του ολοκληρώματος της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + (2 + \frac{i}{2})z + i}$$

πάνω από την απλή καμπύλη με αρχή και τέλος το σημείο $1 + i$, η οποία διέρχεται διαδοχικά από τα σημεία $1 - i, -1 - i, -1 + i$ (με αυτή τη σειρά), είναι

(i) $2\pi \dfrac{2i - 1}{5}$

(ii) $-2\pi \dfrac{2i - 1}{5}$

(iii) $2\pi \dfrac{2i + 1}{5}$

(iv) $-2\pi \dfrac{2i + 1}{5}$

(v) Κανένα από τα παραπάνω.

(vi) Δεν απαντώ

Ερώτηση 9.

(A) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(4\cos^2 z - 1)\sin z}$$

έχει

(i) απλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/3$

Only Maths
-Official-

(ii) απλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi$

(iii) απλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/2$

(iv) διπλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/2$

(v) διπλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/3$

(vi) διπλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi$

(vi) Κανένα από τα παραπάνω

(vi) Δεν απαντώ

(B) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(1 - 4\sin^2 z)\cos z}$$

έχει

(i) απλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/3 + \pi/6$

(ii) απλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/2 + \pi/4$

(iii) απλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi + \pi/2$

(iv) διπλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/3 + \pi/6$

(v) διπλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/2 + \pi/4$

(vi) διπλούς πόλους μόνο στα σημεία $z = k\pi/2 + \pi/4$

(vi) Κανένα από τα παραπάνω

(vi) Δεν απαντώ

Ερώτηση 10.

(A) Η συνάρτηση $\cos(x + iy),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχει πραγματικές τιμές αν και μόνο αν

(i) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ή $y = 0$

(ii) $x = k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$ ή $y = 0$

(iii) Κανένα από τα παραπάνω

(iv) Δεν απαντώ

(B) Η συνάρτηση $\sin(x + iy),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχει πραγματικές τιμές αν και μόνο αν

(i) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ή $y = 0$

(ii) $x = k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$ ή $y = 0$

(iii) Κανένα από τα παραπάνω

(iv) Δεν απαντώ

Only Maths
-Official-